Module 13 the dual of L^p spaces

13.1 the dual of L^p-I [Fol 6.2]

对应: Folland 5.1, 6.2.

(原本这是在 lec 25 的位置讲的, 但是当时由于没有 Radon-Nikodym Thm, 没有足够的工具去完成

$$(L^p)^* = L^q$$

的证明 (差了一个 proof surjectivity of the isometry $g \to \ell_g$). 因而我把它放在这里, 衔接下面几个 lectures, 完成 6.2 这一节.

我们首先练习一个 example of Hölder's ineq 来回忆一下:

recall Hölder's ineq: for $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies$

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

Example 13.1 Prove:

$$f \in L^3([-1,1], m) \implies \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{|x|}}\, dx < \infty$$

Proof Apply Hölder's: 既然 $f \in L^3$, 那么我们就拉满, take $p = 3$, correspondingly $q = 3/2$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{|x|}}\, dx \leq \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^3\, dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^{\frac{3}{4}}}\, dx \right)^{\frac{2}{3}} \tag{13.1}$$

both integrals evaluate $< \infty$

13.1.1 intro to dual space

这里只讨论 $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

recall, 对于一个 $\mathbb{K}$-vector space V, 一个 linear functional of V 就是一个 linear function

$$f : V \to \mathbb{K}$$

对于作为 NVS 的 V, 我们还可以定义一个 linear functional 的 boundedness.

Def 13.1 (bounded linear functional)

Let V be a $\mathbb{K}$-NVS, $f : V \to \mathbb{K}$ be a linear functional.

我们称 f bounded, if exist $C > 0$ s.t.

$$|f(v)| \leq C||v||, \quad \forall v \in V$$

♣

Remark 注意, **linear functional 的 boundedness 和它作为函数的 boundedness 是不一样的概念.**

作为函数的 boundedness 表示函数值的有界性, 而**作为 linear map 的 boundedness (此处) 表示它的作用效果的 boundedness, 不会把一个 vector 放大太多倍.**

Proposition 13.1 (linear functional bounded $\iff$ ctn at 0)

if $f : V \to \mathbb{K}$ is a linear functional, TFAE:

- f bounded
- f continuous
- f continuous at $0 \in V$

Proof (ii) to (iii): trivial.

(i) to (ii): 假设 f bounded, 那么可以 pick C s.t. $|f(v)| \leq C||v||$.

Pick $v_0 \in V, \epsilon > 0$. Set $\delta := \frac{\epsilon}{C}$. Then

$$||v - v_0|| < \delta \implies |f(v) - f(v_0)| = |f(v - v_0)| \leq C||v - v_0|| < \epsilon$$

从而 ctn.

(iii) to (i): $\exists \delta > 0$ s.t. $||v|| \leq \delta \implies |f(v)| \leq 1$.

于是 $\forall v \in V \setminus \{0\}$, 都有

$$|f(v)| = \frac{\left|f(v \cdot \frac{\delta}{||v||})\right|}{\frac{\delta}{||v||}} \leq \frac{\delta}{||v||}$$

taking $C = \frac{1}{\delta}$, 得到 boundedness.

Remark 这个 proposition 看起来很神奇, 把一个整体性质和局部性质等价了, 但是我们知道 linear map 就是局部决定整体的, by its def.

recall in 395: 实际上这个性质应该对所有的 linear map 都成立, 不只是 linear functionals.

通常我们认为 linear map 总是 ctn 的, 但是其实它 ctn iff bounded, unbounded 的时候就不 ctn.

以及: **linear map between finite dim spaces 总是 bounded 的, 从而总是 ctn 的**. 不过这里我们要讨论的就是 infinite dim spaces. 比如 L^p.

Def 13.2 (dual space)

If V is a NVS, 我们定义它的 **dual space** as:

$$V^* := \{\text{bounded linear functionals} \quad f : V \to \mathbb{K}\}$$

Def 13.3 (norm of dual space: 即 dual norm)

Given $f \in V^*$, set

$$||f||_* := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{||v||} = \sup_{||v||=1} |f(v)|$$

where $\|v\|$ 表示的是 V 上使用的 norm. 这个 norm 被称为 dual norm.

这个形式是我们在各种地方见过非常多次的 operator norm, 只不过这里, 指定一个 NVS, 对于其 dual space 上的 linear functional, 它是固定的, 不需要指定 v 和 $f(v)$ 使用哪个 norm, 因为 $f(v)$ 就是标量, 而 v from 原 NVS, 已经指定好 norm. **Remark** 从定义中我们可知, 对于任意的 $v \in V$, $f \in V^*$, 都有:

$$|f(v)| \leq \|f\|_* |v|$$

13.1.2 V^* being a Banach space

Theorem 13.1 (dual space is always Banach)

对于**任意的 NVS** V: V^* 都是一个 Banach space. (not assuming V Banach).

Proof First we can confirm V^* is a VS, 因为它由 linear functions of the same size 组成.

Claim 1: V^* 是一个 NVS.

因为任取 $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ 都有 $|f(\lambda v)| = |\lambda| \cdot |f(v)|$, 从而

$$f \in V^*, \lambda \in \mathbb{K} \implies ||\lambda f||_* = |\lambda| \cdot ||f||_*$$

以及

$$f, g \in V^*, v \in V \implies |(f+g)(v)| = |f(v) + g(v)| \le |f(v)| + |g(v)|$$

因而

$$f, g \in V^* \implies \|f+g\|_* \le \|f\|_* + \|g\|_*$$

下面我们 verify V^* Banach.

Claim 2: 一个 Cauchy seq in V^* 一定 pointwise converge to some f.

Pick $(f_n)_1^\infty$, 一个 Cauchy seq in V^*. Let $\epsilon < 0$, 存在 N 使得对于任意 $m, n \ge N$ 都有 $\|f_n - f_m\|_* < \epsilon$, 我们简写为:

$$\|f_n - f_m\|_* \to 0$$

因而对于任意 $v \in V$, we have

$$|f_n(v) - f_m(v)| \le \|f_n - f_m\|_* ||v|| \to 0$$

并且我们知道 $\mathbb{K}$ **是 complete 的**, 因而 $f_n(v)$ converges in $\mathbb{K}$ to some element, declared to be $f(v)$.

即 $f_n \to f$ **pointwisely**:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(v) = f(v)$$

(这是自然的, 因为如果 linear function $f - g$ 的 operator norm 是 0, 那么说明它们毫无差别, 否则一定有某个地方 f, g 的 image 不一样, 使得这个 norm 不是 0.)

Claim 3: f 是 linear 的, 并且 bounded (从而 ctn), 即 $f \in V^*$.

linearity: 由于每个 f_n 都是 linear 的,

$$f_n(x + \alpha y) = f_n(x) + \alpha f_n(y)$$

因而

$$f(x+\alpha y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+\alpha y) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) + \alpha f_n(y)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(x) + \alpha f(y)$$

因此 f 是线性的.

(Note: 这里证明了 linear map 的 pointwise 极限一定也是 linear map.)

Boundedness: Note a standard fact from metric spaces: **every Cauchy sequence is bounded.**

因而 f_n 是一个 bounded seq, 即存在 $M > 0$ such that $\|f_n\| \le M$ for all n. Then

$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right| \le \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_* \|x\| \le M \|x\|$$

Hence f is bounded (continuous), and $\|f\|_* \le M$. **Claim 4: $\|f_n - f\|_* \to 0$, proving V^* 是 Banach 的.**

WTS:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |(f_n - f)(x)| \to 0$$

//TO BE DONE.

Actually 这个 Theorem 有更 general 的形式:

Theorem 13.2

对于任意 nvm V 和 Banach W, $\mathcal{L}(V, W)$ 一定是 Banach 的.

Proof 见 Folland 5.4.

13.1.3 $(L^p)^* = L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Theorem 13.3 (对于互为 conjugate exponent 的 p, q, L^p 是 L^q 的 dual space)

For $1 < p, q < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, we have:

$$(L^p)^* = L^q$$

In particular the Hilbert space:

$$(L^2)^* = L^2$$

Proof Define map

$$L^q \to (L^p)^* \tag{13.2}$$

$$g \mapsto \varnothing_g \tag{13.3}$$

where

$$\varnothing_g(f) := \int fg, \quad f \in L^p$$

It is well-defined by Hölder:

$$f \in L^p, g \in L^q \implies fg \in L^1$$

and

$$||fg||_1 = \int |fg| \le ||f||_p ||g||_q$$

Easy:

$$\varnothing_g(f_1 + f_2) = \varnothing_g(f_1) + \varnothing_g(f_2)$$

Also

$$|\varnothing_g(f)| = \left| \int fg \right| \le \int |fg| \le ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Thus

$$\varnothing_g \in (L^p)^*$$

13.2 the dual of L^p-II [Fol 6.2]

13.3 the dual of L^p-III [Fol 6.2, finished]